

4 Potenz- und Wurzelrechnung

In diesem Kapitel werden wir lernen mit Potenzen zu rechnen. Anschließend befassen wir uns mit der Wurzel. Wir werden sehen, dass die zweite Rechenoperation eng an die erste anlehnt. Es gibt verschiedene Formen von Exponenten. Wir werden uns mit ganzzahligen und rationalen Exponenten auseinandersetzen. Allgemein ist eine Potenz folgendermaßen definiert:

MERKE:

Für $m \in \mathbb{Z}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus 0$ ist die Potenz gegeben durch: a^m .

LAMBERT-KOCHREZEPT:

Die einzelnen Bestandteile, aus denen die Potenz besteht haben konkrete Namen.

Das bedeutet konkret: Potenz = Basis^{Exponent}, in Zeichen: $c = a^m$. Die Zahl a heißt Basis, die Zahl m wird Exponent genannt, Basis und Exponent zusammen bilden die Potenz.

Beispiel 27:

Es ist $2^5 = 32$, hierbei ist 2 die Basis, 5 der Exponent, 32 (bzw. 2^5) die Potenz.

4.1 Ganzzahlige Exponenten bei Potenzen

Bevor die Potenzgesetze formuliert werden, wird grundlegendes bezüglich Potenzen erwähnt.

MERKE:

- Für alle $a \in \mathbb{R} \setminus 0$ gilt: $a^0 = 1$ und $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
- Die Rechenregeln für Potenzen lassen sich vollkommen auf Exponenten aus den natürlichen Zahlen anwenden, d.h. auf folgende Menge $\{1, 2, 3, \dots\}$.
- Die Rechenregeln für Potenzen können vollständig auf Exponenten aus den ganzen Zahlen übertragen werden, d.h. auf die Zahlen: $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$.

Nun lernen wir die Potenzgesetze kennen.

LAMBERT - DARSTELLUNG POTENZGESETZE:

Für ganzzahlige Exponenten und $a, b \in \mathbb{R} \setminus 0$ gelten folgende Gesetze.

1. Gesetz: Multiplikation von zwei Potenzen mit gleicher Basis.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

2. Gesetz: Division von zwei Potenzen mit gleicher Basis.

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

3. Gesetz: Multiplikation von zwei Potenzen gleichem Exponenten.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n.$$

4. Gesetz: Division von zwei Potenzen mit gleichen Exponenten.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

5. Gesetz: Potenzierung einer Potenz.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}.$$

Nun werden wir an Beispielen die Anwendung der Gesetze üben. In allen folgenden fünf Beispielen geht es darum, zu vereinfachen bzw. an geeigneter Stelle zusammenzufassen.

Beispiel 28:

Berechne $x^{10} \cdot x^5 \cdot x^{-4} \cdot x^{-10}$.

$x^{10} \cdot x^5 \cdot x^{-4} \cdot x^{-10} = x^{(10+5-4-10)} = x^1$. Desweiteren ist:

Beispiel 29:

Vereinfache $a^{5n+2} \cdot a^{7-8n} \cdot a^{5n}$

Man rechnet $a^{5n+2} \cdot a^{7-8n} \cdot a^{5n} = a^{(5n+2+7-8n+5n)} = a^{2n+9}$. Hier wurde das 1. Gesetz benutzt.

Beispiel 30:

Vereinfache $\frac{y^4 \cdot y^{-7}}{y^7 \cdot y^9}$.

Es ist $\frac{y^4 \cdot y^{-7}}{y^7 \cdot y^9} = \frac{y^{4-7}}{y^{7+9}} = \frac{y^{-3}}{y^{16}} = y^{-3-16} = y^{-19} = \frac{1}{y^{19}}$ mit Anwenden des 2. Gesetzes.

Beispiel 31:

Läßt sich der Ausdruck $(11,5)^{x+3} \cdot 2^{x+3} \cdot 3^{x+3}$ vereinfachen?

Ja. Mit dem 3. Gesetz ist: $(11,5)^{x+3} \cdot 2^{x+3} \cdot 3^{x+3} = (11,5 \cdot 2 \cdot 3)^{x+3} = 69^{x+3}$.

Beispiel 32:

Mit welchem obigen Gesetz können folgende Ausdrücke anders dargestellt werden?

$$\frac{5^n \cdot y^n}{7^n \cdot z^n} \text{ und } \left(\frac{4x \cdot y \cdot a}{2b \cdot z \cdot c}\right)^3.$$

Mit dem obigen 4. Gesetz sieht man, dass $\frac{5^n \cdot y^n}{7^n \cdot z^n} = \left(\frac{5 \cdot y}{7 \cdot z}\right)^n$. Für den anderen Ausdruck

$$\text{gilt: } \left(\frac{4x \cdot y \cdot a}{2b \cdot z \cdot c}\right)^3 = \frac{64x^3 \cdot y^3 \cdot a^3}{8 \cdot b^3 \cdot z^3 \cdot c^3} = 2 \cdot \frac{x^3 \cdot y^3 \cdot a^3}{b^3 \cdot z^3 \cdot c^3}.$$

Beispiel 33:

Berechne $(x^5 \cdot (-y^7) \cdot z^9)^4 = x^{20} \cdot (-y^{28}) \cdot z^{36}$.

Mit dem obigen 5. Gesetz sehen wir, dass $(x^5 \cdot (-y^7) \cdot z^9)^4 = x^{20} \cdot (-y^{28}) \cdot z^{36}$.

4.2 Rationale Exponenten bei Potenzen

In diesem Unterabschnitt sei $a \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{N}$.

LAMBERT – DARSTELLUNG WURZELGESETZE:

1. Gesetz: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^1}$.

2. Gesetz: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Beispiel 34:

Schreibe die folgenden Zahlen als Wurzel und vereinfache.

a) $5^{\frac{7}{2}}$

b) $126^{\frac{10}{9}}$

a) Es ist $5^{\frac{7}{2}} = \sqrt[2]{5^7} = \sqrt{5^7} = \sqrt{5^6 \cdot 5^1} = \sqrt{5^6} \cdot \sqrt{5^1} = 5^3 \cdot \sqrt{5} = 125 \cdot \sqrt{5}$.

LAMBERT-METHODE:

Es ist extrem wichtig, dass man also möglichst viel aus der Wurzel rauszieht. Wenn man 5^7 in der Wurzel stehen lässt, so ist man noch nicht fertig.

b) $126^{\frac{10}{9}} = \sqrt[9]{126^{10}} = \sqrt[9]{126^9 \cdot 126} = 126 \cdot \sqrt[9]{126}$.

4.3 Logarithmen

MERKE:

Es sei $a \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$ und $b \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann ist die Zahl x , mit der man die Zahl a potenzieren muss, um die Zahl b zu erhalten, der Logarithmus von b zur Basis a , in Zeichen $x = \log_a b$.

LAMBERTSCHE SCHLEIFENREGEL:

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b.$$

Nun werden einige Logarithmen berechnet.

Beispiel 35:

Bestimme die Potenzen der folgenden Zahlen:

a) $\log_5 625$

b) $\log_6 36$

c) $\log_7 1$

d) $\log_3 729$

e) $\log_2 \sqrt[3]{32^1}$.

a) $\log_5 625 = 4$, da $5^4 = 625$.

LAMBERT-TRICK:

Dies sieht man auch leichter durch Anwendung des u.e. vierten Logarithmus-Gesetzes.

Also konkret $\log_5 625 = \log_5 5^4 = 4$, da die Basen übereinstimmen, hier also jeweils 5 sind.

b) $\log_6 36 = 2$, da $6^2 = 36$.

c) $\log_7 1 = 0$, da $7^0 = 1$ bzw. sei $a \in \mathbb{R}_{>0} \setminus 1$ $\log_a 1 = 0$, da $a^0 = 1$.

d) $\log_3 729 = 6$, da $3^6 = 729$.

e) $\log_2 \sqrt[3]{32^1} = \log_2 32^{\frac{1}{3}} = \log_2 2^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}$, da $2^{\frac{5}{3}} = 32^{\frac{1}{3}}$.

LAMBERT - DARSTELLUNG LOGARITHMENGESetze:

1. Gesetz: Ein Produkt von Logarithmen wird logarithmiert, indem die einzelnen Faktoren logarithmiert werden und dann die zuvor logarithmierten Faktoren addiert werden. Dies heißt mathematisch ausgedrückt: Seien $u, v \in \mathbb{R}_+ \setminus 0$. Dann gilt: $\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$.
2. Gesetz: Wird ein Bruch logarithmiert, so ist das Ergebnis: Logarithmierter Zähler - logarithmierter Nenner bzw. für $u, v \in \mathbb{R}_+ \setminus 0$ gilt: $\log_a \left(\frac{u}{v} \right) = \log_a u - \log_a v$.
3. Gesetz: Das Ergebnis einer logarithmierten Potenz ist die logarithmierte Basis multipliziert mit dem Exponenten. Das heißt: Für $u \in \mathbb{R}_+ \setminus 0$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt: $\log_a u^t = t \cdot \log_a u$.
4. Gesetz: Wenn die Basen übereinstimmen, so ist das Ergebnis des Logarithmus genau der Exponent, also $\log_a (a^b) = b$.

Es folgen nun einige Beispiele zu den Logarithmusgesetzen.

Beispiel 36:

Berechne $\log_a (w \cdot x \cdot y \cdot z)$ und benenne das entsprechende Gesetz.

Mit dem 1. Gesetz ergibt sich: $\log_a (w \cdot x \cdot y \cdot z) = \log_a w + \log_a x + \log_a y + \log_a z$.

Vorsicht: $\log_a x(10y + z) = \log_a (10xy + xz)$. Anhand dieser Darstellungsform sehen wir nicht, wie wir diesen Ausdruck vereinfachen können.

Beispiel 37:

Welches Gesetz führt zu einer anderen Darstellung von $\log_a \left(\frac{x}{10y \cdot z} \right)$?

Das Ziel kann mit dem zweiten Gesetz erreicht werden. Dann ist

$$\begin{aligned} \log_a \left(\frac{x}{10y \cdot z} \right) &= \log_a x - \log_a (10y \cdot z) = \log_a x - (\log_a (10y) + \log_a z) \\ &= \log_a x - (\log_a y + \log_a 10 + \log_a z) = \log_a x - \log_a y - \log_a 10 - \log_a z. \end{aligned}$$

Beispiel 38:

Bestimme eine Summendarstellung von $\log_a x^5 y^7$.

Das dritte Gesetz erlaubt eine Summendarstellung, so dass

$$\log_a x^5 y^7 = \log_a x^5 + \log_a y^7 = 5 \cdot \log_a x + 7 \cdot \log_a y.$$

Beispiel 39:

Vereinfache

a) $\log_a x^{\frac{5}{3}}$

b) $\log_a x^{\frac{5}{3}} y^{\frac{7}{4}}$.

Das 2. Gesetz gestattet bei a) und b) eine leichter zu berechnende Form. D.h. konkret

a) $\log_a x^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3} \cdot \log_a x.$

b) $\log_a x^{\frac{5}{3}} y^{\frac{7}{4}} = \log_a x^{\frac{5}{3}} + \log_a y^{\frac{7}{4}} = \frac{5}{3} \cdot \log_a x + \frac{7}{4} \cdot \log_a y.$

Beispiel 40:

Schreibe den folgenden Ausdruck als einen Bruch:

$$\frac{10}{3} \log_a z + 7 \cdot \log_a v - 10 \cdot \log_a q + 5 \cdot \log_a v.$$

Es werden alle Gesetze benötigt, um das gewünschte Ergebnis zu erhalten. Dann ist

$$\frac{10}{3} \log_a z + 7 \cdot \log_a v - 10 \cdot \log_a q + 5 \cdot \log_a v = \log_a z^{\frac{10}{3}} + \log_a v^7 - \log_a q^{10} + \log_a v^5 = \log_a z^{\frac{10}{3}} + \log_a v^7$$

$$+ \log_a v^5 - \log_a q^{10} = \log_a \left(z^{\frac{10}{3}} v^7 \cdot v^5 \right) - \log_a q^{10} = \frac{\log_a \left(z^{\frac{10}{3}} v^{12} \right)}{\log_a q^{10}}.$$

Wir belegen manche Logarithmen mit speziellen Buchstaben, nämlich jenen zur Basis 10 nennen wir „lg“,

jenen zur Basis e (= Eulersche Zahl) nennen wir „ln“.

Beispiel 41:Wir sagen deshalb abkürzend lg 51 statt $\log_{10} 51$ bzw. ln 83 statt $\log_e 83$.

Auch dazu einige kleine Aufgaben.

Beispiel 42:

Berechne

a) $\lg 1.000,$

b) $\lg 10$

c) $\ln e,$

d) $\ln e^{31}.$

Es ist

a) $\lg 1.000 = 3,$ denn die (stille) Basis ist 10, also

$\lg 1.000 = \log_{10} 1000 = \log_{10} 10^3 = 3.$

Dies ist auch einsichtig, denn $10^3 = 1.000.$

b) Es ist $\lg 10 = 1,$ denn $10^1 = 10.$

c) $\ln e = 1,$ denn die stille Basis e hoch 1 ist genau die Zahl e, die im Logarithmus steht, also $e^1 = e.$

d) Es ist $\ln e^{31} = 31.$

4.4 Logarithmusgleichungen

Diese Gleichungen unterscheiden sich von den übrigen vor allem dadurch, dass die Variable (zum Beispiel x) im Exponenten erscheint. Alle Gleichungen haben als Ziel,

die Isolation von x auf eine Seite der Gleichung. Das erste Beispiel wird ausführlich angegangen. Bei den übrigen Beispielen wird das gleiche Grundgerüst - zur Lösung - verwendet. Da bei unseren Betrachtungen Größenordnungen von Zahlen wichtig sind müssen wir oft den Logarithmus zur Basis 10 wählen.

Beispiel 43:

Es ist nach der Lösung der Gleichung $10^x = 125$ gefragt. An dieser Stelle wissen wir, dass nach x aufgelöst werden muss. Steht die Variable im Exponenten, so ist zunächst die Gleichung zu logarithmieren, d.h. $\log_{10} 10^x = \log_{10} 125$. Durch Anwenden des dritten Logarithmusgesetzes ergibt sich:

$$x \cdot \log_{10} 10 = \log_{10} 125 \Leftrightarrow x = \frac{\log_{10} 125}{\log_{10} 10} = \frac{\log_{10} 125}{1} = \log_{10} 125, \text{ denn } 10^{\log_{10} 125} = 125.$$

LAMBERT - TIPP:

Bei solchen Aufgaben ist es immer besser - wenn möglich - den berechneten logarithmierten Wert im Taschenrechner abzuspeichern. Dann sollte mit diesem Wert weiter gerechnet werden.

Es muss jedem bewußt sein, dass im Falle, dass gerundet werden muss, das Ergebnis sich minimal verfälschen kann.

Beispiel 44:

Nun geht es darum die Lösung der Gleichung $2 \cdot 7^{2x} = 6^{x+5}$ zu bestimmen. Auch hier steht die Variable im Exponenten, so dass logarithmiert werden muss:

$\log_{10} (2 \cdot 7^{2x}) = \log_{10} 6^{x+5}$. In den folgenden Schritten werden wir die Logarithmusgesetze anwenden.

$$\log_{10} (2 \cdot 7^{2x}) = \log_{10} 6^{x+5}; \log_{10} 2 + \log_{10} 7^{2x} = (x+5) \log_{10} 6;$$

$$\log_{10} 2 + 2x \cdot \log_{10} 7 = x \cdot \log_{10} 6 + 5 \cdot \log_{10} 6; 2x \cdot \log_{10} 7 - x \cdot \log_{10} 6 = -\log_{10} 2 + 5 \cdot \log_{10} 6. \text{ Nun wird zusammengefasst und anschließend } x \text{ isoliert, d.h.}$$

$$x(2 \cdot \log_{10} 7 - \log_{10} 6) = -\log_{10} 2 + 5 \cdot \log_{10} 6 \Leftrightarrow x = \frac{-\log_{10} 2 + 5 \cdot \log_{10} 6}{2 \cdot \log_{10} 7 - \log_{10} 6} = \frac{-0,30 + 3,89}{1,69 - 0,78} = \frac{3,59}{0,91} = 3,95.$$

Somit löst $x = 3,95$ die Gleichung.

Man kann die Aufgabe auch „anders“ lösen:

$$2 \cdot 7^{2x} = 6^{x+5} \Leftrightarrow 2 \cdot 7^{2x} = 6^{x+5} \Leftrightarrow 2 \cdot (7^2)^x = 6^x \cdot 6^5 \Leftrightarrow 2 \cdot (49)^x = 6^x \cdot 6^5$$

$$\Leftrightarrow \frac{49^x}{6^x} = \frac{6^5}{2} = 3,888 \Leftrightarrow \left(\frac{49}{6}\right)^x = 3,888 \Leftrightarrow x = \log_{49/6}(3,888).$$

Diesen kann man nun mit dem Taschenrechner auf unterschiedliche Weise kalkulieren. Da dieser nur den Logarithmus zur Basis e und zur Basis 10 kennt, also \ln und \lg , muss man ihm den o.e. Logarithmus übersetzen. Dies geht so:

$$\log_{\frac{49}{6}} 3,888 = \frac{\ln 3,888}{\ln \frac{49}{6}} = \frac{8,26565}{2,100061} = 3,9359$$

oder auch mit dem Logarithmus zur Basis 10:

$$\log_{\frac{49}{6}} 3,888 = \frac{\lg 3,888}{\lg \frac{49}{6}} = \frac{3,5897}{0,91204} = 3,9359.$$

Also gilt: $2 \cdot 7^{2 \cdot 3,9359} = 6^{3,9359+5}$. Auf der linken Seite $2 \cdot 7^{7,8718} = 6^{8,9359}$, also

$2 \cdot 4.491.157,045 = 8.984.248,552$, was bis auf Rundungsungenauigkeiten richtig ist.