

10.4 Die Binomialverteilung

Es gibt spezielle Verteilungen, die sich „aus der Natur heraus“ erklären lassen. Hierzu gehören die Binomialverteilung $B(n, p)$, die Hypergeometrische Verteilung $H(N, M, n)$, die geometrische Verteilung, die diskrete als auch die stetige Gleichverteilung.

Wann benutzt man die Binomialverteilung?

LAMBERT-REGEL Binomialverteilung $B(n,p)$

Voraussetzung:

Gegeben seien n Experimente, die

- unabhängig voneinander sind und
- mit jeweils genau zwei Ergebnissen, nämlich Erfolg und Misserfolg.

Die Wahrscheinlichkeit für Erfolg sei p , die Misserfolgswahrscheinlichkeit entsprechend $1-p$.

- **Frage:** wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim vorliegenden Experiment genau k Erfolge zu erzielen mit $0 \leq k \leq n$?
- **Antwort:** X bezeichne die Zufallsvariable, die die Anzahl der Erfolge angibt. Dann lässt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnen mit

$$f(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}.$$

MERKE:

- Die Binomialverteilung lässt sich immer dann anwenden, wenn die beiden Punkte der in der obigen Regel genannten Voraussetzung gegeben sind. Entscheidend ist daher, diese beiden Bedingungen abzu prüfen.
- Das oben beschriebene Experiment lässt sich auch verstehen als Ziehen aus einer Urne mit Zurücklegen. Dadurch, dass die gezogene Kugel wieder zurückgelegt wird, sind die Ereignisse unabhängig voneinander.
- Die o.e. Funktion f ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung $B(n,p)$.

Beispiel 10.6:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim dreifachen Werfen einer fairen Münze genau zweimal Kopf fällt?

Das Beispiel wurde weiter oben schon gelöst. Wir zeigen hier, dass man auch über die Binomialverteilung herangehen kann.

Hierzu überprüfen wird die o.e. Voraussetzungen.

Es handelt sich um $n = 3$ Experimente, nämlich das dreimalige Werfen einer fairen Münze.

- Die einzelnen Würfe sind unabhängig voneinander. Das Ergebnis des zweiten Wurfs beispielsweise beeinflusst den dritten nicht usw.
- In jedem einzelnen Wurf sind genau zwei Ergebnisse möglich, nämlich Kopf und Zahl.

In der Aufgabenstellung wird nach dem Auftreten des Ereignisses „Kopf“ gefragt, dies ist damit der Erfolg. Die Erfolgswahrscheinlichkeit ist $p = \frac{1}{2}$, da in jedem einzelnen der Würfe entweder Kopf oder Zahl fällt, und zwar beide Ereignisse mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Wir verwenden also die Binomialverteilung $B(3; \frac{1}{2})$.

MERKE:

- es ist nicht notwendig, dass die Erfolgswahrscheinlichkeit p immer gleich der Misserfolgswahrscheinlichkeit $1-p$ ist, nämlich beide gleich $\frac{1}{2}$.
- man sieht, dass man das Experiment auch verstehen kann also Ziehen aus einer Urne mit Zurücklegen: in einer Urne sind zwei Kugeln, auf der einen steht „Kopf“, auf der anderen „Zahl“. Man zieht eine Kugel, notiert das Ergebnis und legt die gezogene Kugel wieder in die Urne zurück. Danach zieht man noch mal usw. Das Ergebnis ist identisch mit dem dreimaligen Werfen einer fairen Münze. Man sieht, dass nur durch das Zurücklegen der gezogenen Kugeln die einzelnen Züge unabhängig voneinander sind. Die Verteilung der Kugeln in der Urne wird durch das Zurücklegen gerade nicht verändert (anders beim Fall ohne Zurücklegen: hier beeinflusst ein Zug den darauffolgenden, da die gezogene Kugel nicht nochmals gezogen werden kann. Wir kommen bei der Hypergeometrischen Verteilung hierauf zurück).
- „Zwei“ mögliche Ergebnisse heißt nur, dass nach zweien *gefragt* ist. Wenn in einer Urne rote, blaue und grüne Kugeln liegen und nach dem Auftreten von blauen Kugeln gefragt ist, so ist die $B(n,p)$ -Ver-

teilung sehr wohl anwendbar, denn es sind blaue und nicht-blaue (= rote, grüne) Kugeln in der Urne vorhanden.

Es sei nun X die Anzahl der gefallenen Köpfe. Man rechnet die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei Köpfe fallen, aus als ($n = 3$, $p = \frac{1}{2}$, $k = 2$):

$$f(2) = P(X = 2) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-2} = \frac{3}{8} = 0,375. \text{ Dieses Ergebnis}$$

hatten wir schon vorher gesehen, als wir die Aufgabe ohne die Kenntnis einer Verteilung ausgerechnet hatten.

Man kann nun auch die Wahrscheinlichkeiten der anderen möglichen Ereignisse berechnen, nämlich drei Köpfe zu werfen ($P(X = 3)$), genau einen ($P(X = 1)$) sowie gar keinen ($P(X = 0)$):

Man erhält also wieder folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion:

X	P
0	0,125
1	0,375
2	0,375
3	0,125